

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА УЕДИНЁННЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЛН ПЕРЕНОСА ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ СТЕРЖНЮ

Отримано формули для розрахунку енергії, яку переносять експоненціальні хвилі деформації кручення стрижня, що мають квантовану амплітуду. Показано, що основні характеристики хвилі при зміні швидкості переносу підкорюються релятивістському перетворенню Лоренца, а її ефективна довжина скорочується відповідно до гіпотези Фітцджеральда.

Получены формулы для расчёта энергии, которую переносят экспоненциальные волны крутильной деформации стержня, имеющие квантованную амплитуду. Показано, что основные характеристики волны при изменении скорости переноса подчиняются релятивистскому преобразованию Лоренца, а её эффективная длина укорачивается в соответствии с гипотезой Фитцджеральда.

The formulas for calculation of energy are obtained, which one is transferred by exponential wave of torsion deformation of a rod having quantized amplitude. Is rotined, that the basic performances of a wave at an alteration of speed of carry are subject to relativistic Lorentz transformation laws, and e ÷ the effective length is shortened pursuant to a hypothesis Fitzgerald.

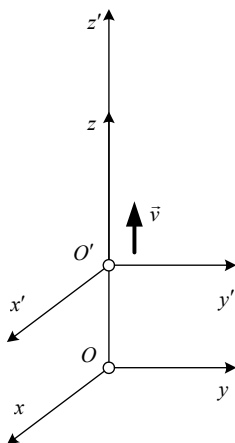


Рисунок 1 –  
Системы координат.

**Введение.** Знание релятивистской квантовой физики, выстроенное Альбертом Эйнштейном и его последователями, строилось не на песке и основывалось, в том числе, на некоторых выводах волновой механики, которые были классическими по сути, но релятивистскими и совершенно неожиданными по форме. Новый пример такого типа проанализирован в этой статье далее, но прежде обратимся к истории рассматриваемой научной проблемы.

**Релятивизм и инвариантность.** Рассмотрим две системы координат, имеющие параллельные оси: неподвижную  $Oxyz$  и движущуюся  $O'x'y'z'$  (рис.1). Вторая система имеет постоянную скорость  $\vec{v} = v \cdot \vec{k}$ , а координаты связаны равенствами

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - v \cdot t,$$

причём время для обеих систем принимается одним и тем же:  $t' = t$ . Тогда скорости  $\vec{u}, \vec{u}'$  и ускорения

$\vec{a}, \vec{a}'$  оказываются связанными известными соотношениями

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{a}' = \vec{a}.$$

В современной физике приведенную систему соотношений для координат

нат, скоростей и ускорений называют *преобразованием Галилея* [1], это преобразование связывает параметры движения в инерциальных системах отсчёта, движущихся с малой относительной скоростью  $v/c \ll 1$ , и было положено в основу классической механики, разработанной *Ньютоном* и его последователями. Но применительно к электродинамике, описываемой *уравнениями Максвелла*, соотношения Галилея были признаны неудовлетворительным по следующим причинам:

- при переходе к системе, движущейся вместе с зарядами, происходит существенное усложнение уравнений для потенциалов;
- условие  $v/c \ll 1$  не выполняется для многих электродинамических процессов, происходящих в лаборатории или в окружающей среде;
- преобразование Галилея противоречит опытам Майкельсона и Морли.

Чтобы исправить положение, Лоренц предложил своё преобразование координат, времени, массы и напряжённостей электромагнитного поля, которое впоследствии было названо *преобразованием Лоренца*.

Пусть  $v/c = \beta < 1$  и  $1/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma > 1$ . Тогда при переходе от (условно) неподвижной системы  $Oxyz$  к движущейся системе  $O'x'y'z'$  (рис.1) принимаются следующие соотношения:

- для координат и времени:  $x' = x, y' = y, z' = \gamma(z - v \cdot t), t' = \gamma(t - \beta z/c)$ ;
- для инерционной массы:  $m' = \gamma \cdot m$ ;
- для напряжённостей электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma \cdot (E_x - \beta \cdot H_y), \quad E'_y = \gamma \cdot (E_y + \beta \cdot H_x), \quad E'_z = E_z, \\ H'_x &= \gamma \cdot (H_x + \beta \cdot E_y), \quad H'_y = \gamma \cdot (H_y - \beta \cdot E_x), \quad H'_z = H_z; \end{aligned}$$

- величина и плотность заряда считается неизменной:  $q' = q, \lambda' = \lambda$ ;
- плотность тока  $J'$  пересчитывается пропорционально изменению скорости:

$$u'_x = u_x / (\gamma (1 - \beta u_z / c)), \quad u'_y = u_y / (\gamma (1 - \beta u_z / c)), \quad u'_z = (u_x - v) / (1 - \beta \cdot u_z / c).$$

Лоренц доказал, что предложенная им система замен сохраняет неизменной форму уравнений динамики движущихся зарядов, а именно

- уравнения Максвелла принимают вид (здесь  $\nabla' = \{ \partial / \partial x', \partial / \partial y', \partial / \partial z' \}$ ):

$$\begin{cases} \nabla' \times \vec{E}' = -c^{-1} \partial \vec{H}' / \partial t', & \nabla' \cdot \vec{E}' = 4\pi \cdot \lambda', \\ \nabla' \times \vec{H}' = c^{-1} \partial \vec{E}' / \partial t' + (4\pi / c) \vec{J}', & \nabla' \cdot \vec{H}' = 0, \end{cases}$$

- уравнения для потенциалов остаются волновыми:

$$c^{-2} \partial^2 \Phi' / \partial t'^2 = \nabla'^2 \Phi' + 4\pi \cdot \lambda', \quad c^{-2} \partial^2 \vec{A}' / \partial t'^2 = \nabla'^2 \vec{A}' + (4\pi / c) \cdot \vec{J}',$$

- связь потенциалов и напряжённостей описывается формулами

$$\vec{E}' = -\nabla' \Phi' - c^{-1} \partial \vec{A}' / \partial t' \quad \text{и} \quad \vec{H}' = \nabla' \times \vec{A}',$$

- сила Лоренца, действующая на заряд  $q'$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}'$ ,

описывается формулой  $\vec{F}' = q' \cdot (\vec{E}' + (\vec{v}'/c) \times \vec{H}')$ .

Следует особо подчеркнуть, что, по твёрдому убеждению Лоренца, реального сжатия пространства в направлении движения заряда и фактического замедления времени не происходит; реально «сжимается» только лишь объём аналитической работы, необходимый для визуализации электромагнитного поля. Лоренц смотрел на своё преобразование как на удобный и достаточно заурядный приём решения соответствующих уравнений и никогда не фетишизировал используемые в нём замены. Но при дальнейшем развитии физики, происходящем в 20-м столетии, это преобразование ждала другая судьба.

Напомним, что квантовая физика в первые годы развития не имела наглядных физических моделей и использовала формальные критерии для отбора математических моделей, пригодных для решения поставленных задач. Одним из критериев служил принцип соответствия уравнений преобразованию Лоренца. При этом физики исходили из следующего здравого рассуждения: если объекты квантовой физики являются волнами переноса, а перенос описывается волновым уравнением, которое «выдерживает» преобразование Лоренца, то и уравнения, описывающие объект, должны «выдерживать» это преобразование. Иначе при изменении скорости объект неминуемо распадётся.

Известно, что уравнения, которые не изменяют своей формы в результате преобразования Лоренца, называют *релятивистски инвариантными*. К таким, в частности, относятся *уравнения Максвелла, Гельмгольца, Клейна – Гордона*, а также некоторые системы уравнений в частных производных, например, *уравнения Дирака*, описывающие электроны, и *уравнения общей теории относительности*, разработанной Эйнштейном. В то же время *уравнение Шредингера* не является инвариантным относительно преобразования Лоренца, и это закономерно – оно описывает движение внешнего электрона, имеющего малые относительные скорости  $\beta = v/c < 1/137$ , и здесь допустимо использовать классическое преобразование Галилея.

При создании теории относительности Эйнштейн постулировал несколько физических принципов, например, равенство гравитационной и инерционной массы, которое неукоснительно выполняется на практике. Один из принципов провозгласил равенство скоростей света  $c$  для всех инерционных систем отсчёта и имел прямое отношение к преобразованию Лоренца.

Тут следует напомнить, что Лоренц нашёл не одно, а множество преобразований, зависящих от некоторого параметра  $k$  и сохраняющих инвариантность указанных выше уравнений, но с одной оговоркой: эти преобразования содержали также и формулу для пересчёта величины скорости света вида

$$c' = f(\beta, k) \cdot c.$$

Изменяя параметр  $k$ , можно получить не только разные значения скорости света, но и иные, чем указано в [1], изменения масштабов для координат и времени; например, можно было оставить неизменным «ход времени», а вместе с «продольным» растяжением осей использовать и «поперечное». С

формальной точки зрения все такие преобразования одинаково полезны, поскольку они не влияли на конечный результат. Но, проанализировав результаты опыта Майкельсона – Морли (смотри ниже), *Эйнштейн счёл необходимым из всех возможных преобразований Лоренца рекомендовать использовать то, которое не изменяет значения скорости света.*

В этом случае преобразование Лоренца получало дополнительную идейную нагрузку и соответствовало новым, на то время, представлениям о свойствах физического пространственно – временного континуума.

Известные опыты *Майкельсона* и *Морли* проводились в 1887-м году, а затем повторялись многими исследователями. К тому времени, на основе изучения колебательных явлений в разных сферах, было выяснено, что:

- скорость волны продольных колебаний зависит от скорости источника,
- скорость волны поперечных колебаний не зависит от скорости источника.

Кроме того, считалось, что свет – это короткие электромагнитные волны, то есть поперечные колебания эфира; следовательно, абсолютная скорость волны должна здесь равняться относительной скорости (скорости света  $c$ ).

Схема проведения опытов хорошо известна: в крестообразном интерферометре Майкельсона (рис. 2) монохроматический луч света расщеплялся полупрозрачным зеркалом на два потока (параллельный и перпендикулярный) и направлялся по путям одинаковой длины  $L$ ; после отражения от зеркал он собирался тем же полупрозрачным зеркалом и в зрительной трубе наблюдался результат интерференции этих потоков.

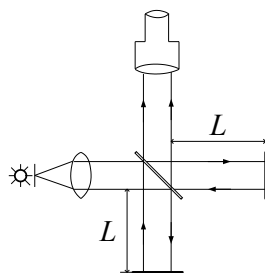


Рисунок 2 – Схема интерферометра.

Параллельный поток имел направление орбитальной скорости Земли  $\vec{v}$ , величина которой, как известно, приближённо равна  $29 \text{ км/с}$ . Считалось, что эфир неподвижен, а свет распространяется по нему с одинаковой скоростью  $c \approx 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$ , *не зависящей от скорости излучателя*. Экспериментаторы подсчитали, что скорость движения Земли приведёт к разной длине пути, проходимого светом, и эту разницу планировали зарегистрировать при помощи интерферометра.

Действительно, для параллельного луча света продолжительности  $T_1^{\parallel}$  и  $T_2^{\parallel}$  распространения в прямом и обратном направлениях удовлетворяют очевидным соотношениям

$$c \cdot T_1^{\parallel} = L + v \cdot T_1^{\parallel}, \quad c \cdot T_2^{\parallel} = L - v \cdot T_2^{\parallel}, \quad \text{откуда} \quad T_1^{\parallel} + T_2^{\parallel} = (2L \cdot c) / (c^2 - v^2).$$

Для луча, движущегося перпендикулярно, продолжительности  $T_1^{\perp}$  и  $T_2^{\perp}$  распространения в прямом и обратном направлениях одинаковы и находятся из условия

$$\sqrt{c^2 - v^2} \cdot T_{1,2}^\perp = L, \quad \text{откуда} \quad T_1^\perp + T_2^\perp = 2L / \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Следовательно,

$$(T_1^\perp + T_2^\perp) / (T_1^\parallel + T_2^\parallel) = \sqrt{1 - (v/c)^2} = 1/\gamma < 1,$$

что и создавало соответствующую разницу пройденных путей, которую было нетрудно зарегистрировать в эксперименте.

Однако, к удивлению экспериментаторов, *указанной разницы путей в эксперименте обнаружено не было*. Позже догадались, что абсолютная скорость движения Земли относительно эфира может иметь другую величину и направление. Поэтому этот прибор ориентировали в разных направлениях пространства, но результат не изменился.

После столь очевидного триумфа экспериментальной физики над её теоретическими моделями, построенными при использовании принципа относительности Галилея, а также законов классической механики Ньютона и электродинамики Максвелла, учёные начали отрабатывать версии, объяснявшие обнаружившийся парадокс. Одна из них, которая поначалу большинством физиков всерьёз не воспринималась, привела к созданию теории относительности Эйнштейна. Но имеет смысл напомнить о существовании менее радикальной версии.

Английский физик *Фитцджеральд* предположил (смотри [2]), что движущиеся твёрдые тела **реально** сокращают свои размеры в направлении движения, причём коэффициент сокращения  $k_\parallel$  определяется формулой

$$k_\parallel = 1/\gamma = \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

При этом он исходил из того, что в направлении движения электрическое поле каждого одиночного заряда ослабевает в  $1/\gamma^2$  раз и это, согласно *закону Кулона*, приводит к уменьшению расстояния между зарядами кристаллической решётки в  $1/\gamma$ , то есть, в  $k_\parallel$  раз. Тогда, в результате преобразования Лоренца, длина прямого пути составляет

$$L^\parallel = \gamma \cdot (k_\parallel \cdot L) = \gamma \cdot ((1/\gamma) \cdot L) = L,$$

что и объясняет наблюдаемый парадокс.

Это была хорошая версия, но у неё быстро обнаружился изъян. В направлении, перпендикулярном движению, поле усиливается в  $\gamma$  раз, что, исходя из провозглашённого принципа, должно приводить к расширению твёрдых тел в этом направлении с некоторым коэффициентом  $k_\perp$ . Для согласования теории с экспериментом необходимо, чтобы

$$k_\parallel / k_\perp = 1/\gamma,$$

и получить эту пропорцию только лишь на основании закона Кулона не удаётся. Тем не менее, закономерности *фитцджеральдовой деформации тел* можно уточнить; поэтому, учитывая результаты моделирования экспоненциальных волн переноса (смотри далее), а также цитированное в [3] мнение

Дирака о значении отрицательных частот для новых теорий квантовой физики, отбрасывать эту версию, как заведомо несостоятельную, не следует.

О роли преобразования Лоренца для современных теорий глобальных полей (материального и информационного) рассказано в статьях [4, 5].

**Постановка задачи.** В работе [3] при использовании трёхмерной модели линейной теории упругости решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по прямому цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы, в том числе потенциалы Герца, связанные граничными условиями на боковой поверхности стержня. Полученные решения подтвердили, а в случае коротких волн – уточнили, результаты применения для этой же задачи классической теории тонких стержней, использующей гипотезу о равномерном деформировании сечения (рис.3).

Показано, что при упругих вращениях поперечных сечений стержня смещения среды  $\vec{u}$  в цилиндрических координатах описываются формулой

$$\vec{u} = A \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(i\omega t - i\lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi \quad (1)$$

и дисперсионным соотношением

$$\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2 = v_{2,j}^2 / R^2, \quad (2)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\lambda, \omega$  – волновое число и круговая частота,  $a_{non}$  – скорость распространения волны крутильной деформации,  $v_{2,j}$  –  $j$ -й корень функции Бесселя  $J_2(x)$ ,

$$\beta = \sqrt{\omega^2 / a_{non}^2 - \lambda^2}.$$

При условии  $j = 0$  имеем выро-

жденный случай  $\beta_1 = 0$ , который соответствует равномерному вращению сечения вокруг его оси, описываемому классической моделью стержня.

На рис.4 этому вращению соответствует прямая линия, проходящая через начало координат. При  $j = 1$  получаем простейшее *зональное вращение* стержня (рис.5); на рис.4 ему отвечает смещённая прямая линия.

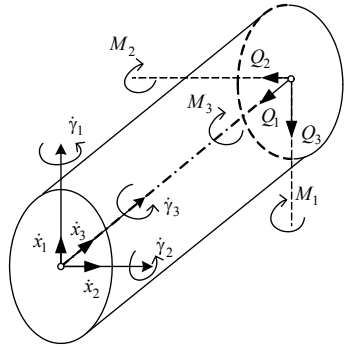


Рисунок 3 – Скорости смещения сечения стержня и действующие в нём силы.

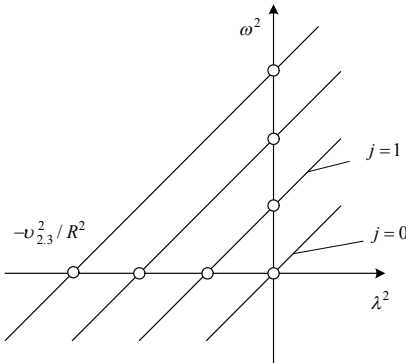


Рисунок 4 – Решения дисперсионного уравнения для равномерного ( $j = 0$ ) и зонального ( $j > 0$ ) вращения

В первом и третьем квадранте решение (1) является ограниченным и описывает уединённую волну трансляции, распространяющуюся вдоль оси стержня со скоростью

$$v = \omega / \lambda .$$

Причём для третьего квадранта зависимость (1) целесообразно переписать в виде

$$\vec{u} = A \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi, \quad (1 \text{ а})$$

где, следуя Дираку, положительное число  $\omega$  называют отрицательной частотой, а положительное число  $\lambda$  — отрицательным волновым числом.

Волна (1 а) и без учёта трения оказывается затухающей по длине. Непосредственной целью данной работы является определение энергии этой экспоненциальной волны, после чего будет предпринята ещё одна попытка обоснования некоторых релятивистских эффектов квантовой волновой механики на основе известных законов классической механики.

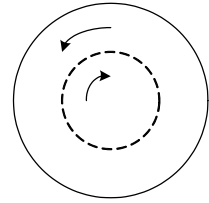


Рисунок 5 —  
Зональное кру-  
чение сечения

**Энергия экспоненциального фонона.** Вернёмся к анализу результатов, представленных на рис.4. Наклонная прямая, проходящая через начало координат, отвечает уравнению

$$a_{non}^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 = \partial^2 \psi / \partial z^2 ,$$

это уравнение является волновым; в квантовой механике такое уравнение описывает фотоны, а в волновой механике упругой среды волны, аналогичные фотонам, называют *фононами*.

Как видно, фонон существует во всём диапазоне частот (в том числе, и при отрицательных частотах, где соответствующая волна переноса является экспоненциальной). Скорость фонона не зависит от частоты и длины волны.

Предположим, что функция  $\psi$  экспоненциального фонона определяет угол  $\gamma_3$  поворота его сечения и описывается формулой

$$\psi(z, t) = \psi_0 \cdot \exp(\omega t - \lambda z), \quad (3)$$

где амплитуда  $\psi_0$  не зависит от его частоты, и, как для любого фонона,

$$\omega / \lambda = a_{non}. \quad (4)$$

Запишем уравнения крутильных колебаний (смотри статью [6])

$$\left\{ \rho I_3 \cdot \partial^2 \gamma_3 / \partial t^2 = \partial M_3 / \partial z, \quad c\gamma_3 \cdot M_3 = \partial \gamma_3 / \partial z \right. \quad (5)$$

в следующем виде

$$\left\{ \rho I_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial t = \partial M_3 / \partial z, \quad c\gamma_3 \cdot \partial M_3 / \partial t = \partial \omega_3 / \partial z, \right.$$

где  $\omega_3 = \partial \gamma_3 / \partial t$  — это угловая скорость вращения сечения,  $\rho I_3$ ,  $c\gamma_3$  — момент его инерции и коэффициент податливости при кручении.

Тогда

$$\rho I_3 \cdot \omega_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial t + c\gamma_3 \cdot M_3 \cdot \partial M_3 / \partial t = \omega_3 \cdot \partial M_3 / \partial z + M_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial z ,$$

то есть,

$$(\partial / \partial t)(0.5 \rho I_3 \omega_3^2 + 0.5 c\gamma_3 M_3^2) = \partial(\omega_3 M_3) / \partial z .$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$(\partial / \partial t) \int_{-\infty}^{\infty} (0.5 \rho I_3 \omega_3^2(z, t) + 0.5 c\gamma_3 M_3^2(z, t)) dz = \omega_3(z, t) M_3(z, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 .$$

Следовательно, величина

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} (0.5 \rho I_3 \omega_3^2(z, t) + 0.5 c\gamma_3 M_3^2(z, t)) dz$$

не изменяется с течением времени и определяет полную механическую энергию фонона, а интеграл от первого или второго слагаемого – соответственно, кинетическую и потенциальную энергии.

Покажем, что у фонона кинетическая и потенциальная энергии одинаковы. Действительно, в силу равенств (4) и (5)

$$c\gamma_3 \cdot M_3 = \partial \gamma_3 / \partial z = -\lambda \cdot \gamma_3 = -\lambda \cdot \omega_3 / \omega = -a_{non}^{-1} \cdot \omega_3$$

и

$$c\gamma_3 \cdot M_3^2 / (\rho I_3 \omega_3^2) = c\gamma_3^{-1} \cdot a_{non}^{-2} \cdot \omega_3^2 / (\rho I_3 \omega_3^2) = a_{non}^{-2} / (\rho I_3 \cdot c\gamma_3) = 1 .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_n &= \rho I_3 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_3^2(z, t) dz = \rho I_3 \int_0^{\infty} (\partial \psi(0, z) / \partial t)^2 dz = \rho I_3 \cdot \omega^2 \psi_0^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\lambda z} dz = \\ &= \rho I_3 \cdot \omega^2 \psi_0^2 / (2\lambda) = \rho I_3 \cdot 0.5 \cdot \psi_0^2 \cdot a_{non} \cdot \omega . \end{aligned}$$

Обозначим

$$0.5 \cdot \rho I_3 \cdot \psi_0^2 \cdot a_{non} = \hbar ,$$

где величину  $\hbar$  будем называть *константой Планка для стержня*.

В результате мы получили известное из квантовой механики соотношение между энергией фонона  $E$  и его круговой отрицательной частотой  $\omega$  :

$$E = \hbar \cdot \omega .$$

**Преобразование Лоренца для волн переноса в стержне.** Ещё раз вернёмся к графикам рис.4 и рассмотрим наклонную прямую, не проходящую через начало координат. Она отвечает уравнению

$$a_{non}^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 = \partial^2 \psi / \partial z^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2} ,$$

где частота  $\omega_0$  соответствует точке пересечения графика с осью ординат.

Это уравнение Клейна – Гордона, которое в квантовой механике описывает движение не релятивистской частицы, имеющей массу покоя (например, уединённого электрона или протона). В волновой механике устоявшихся названий для аналогичных объектов нет, поэтому будем называть её *Частицей*.



Отрицательная частота  $\omega$  и отрицательное волновое число  $\lambda$  Частицы связаны очевидным соотношением

$$a_{non}^{-2} \omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2},$$

в третьей четверти координатной плоскости  $O\lambda^2\omega^2$  она является ограниченной волной переноса. Скорость этой волны определяется формулами

$$v = \omega / \lambda = a_{non} \cdot \omega / \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} = a_{non} \cdot \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2}} / \lambda.$$

Следовательно, для экспоненциальной Частицы выполнено неравенство  $v < a_{non}$ , и только лишь при условии  $\omega, \lambda \rightarrow \infty$  имеем в пределе  $v \rightarrow a_{non}$ .

Из полученных соотношений несложно вывести и такое:

$$(v / a_{non})^2 (\omega^2 + \omega_0^2) = \omega^2, \quad \text{откуда} \quad \omega = (v / a_{non}) \cdot \omega_0 / \sqrt{1 - (v / a_{non})^2}$$

и (здесь обозначено  $\lambda_0 = \omega_0 / a_{non}$ )

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{1 - (v / a_{non})^2}. \quad (6)$$

В классическом пределе имеем  $\omega \approx 0$ ,  $v \approx 0$ , и величина этой скорости определяется формулой

$$v \approx a_{non} \cdot \omega / \omega_0.$$

**Вычислим кинетическую энергию Частицы.** Учтём, что тангенциальное смещение материала стержня описывается формулой

$$\vec{u}(r, z, t) = (\psi_0 / \beta) \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi,$$

где

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2}, \quad \omega t - \lambda z \leq 0, \quad \beta \cdot R = v_{2,j},$$

$\psi_0$  – константа, определяемая прочностными свойствами материала при ограничении напряжения кручения *def*  $\vec{a}_{r\varphi}$ .

Следовательно, линейная скорость движения среды равняется

$$\vec{v}(r, z, t) = (\psi_0 / \beta_1) \cdot \omega \cdot J_1(\beta_1 r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi,$$

а кинетическая энергия всей волны представляется следующим интегралом:

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R 0.5 \rho \cdot v^2(r, z, t) r dr = \pi \rho \omega^2 \psi_0^2 \beta_1^{-2} \int_0^R 0.5 J_1^2(\beta_1 r) r dr \cdot \int_0^\infty e^{-2\lambda z} dz = \\ &= A_j \cdot \omega^2 / (2\lambda) = 0.5 \cdot A_j \cdot v \cdot \omega = 0.5 \cdot [A_j \cdot \omega_0 / a_{non}] \cdot [1 / \sqrt{1 - (v / a_{non})^2}] \cdot v^2, \end{aligned}$$

где  $A_j = 0.5 \pi \rho \cdot \psi_0^2 \beta^{-2} \cdot \int_0^R J_1^2(\beta r) r dr = 0.5 \pi R^4 \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-4} \cdot \int_0^{v_{2,j}} J_1^2(r) r dr$

– это константа, имеющая физическую размерность  $\text{кг} \cdot \text{м}$ .

Сравнивая результат с известной формулой для кинетической энергии

$$E_k = 0.5 \cdot m \cdot v^2,$$

приходим к выводу, что *Частица обладает массой*

$$m = \frac{m_{0,j}}{\sqrt{1 - (v/a_{non})^2}}, \quad (7)$$

где величина  $m_{0,j} = A \cdot \omega_0 / a_{non} = 0.5\pi R^3 \cdot \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-3} \cdot \int_0^{v_{2,j}} J_1^2(r) r dr$

определяет её *массу покоя*.

Соотношения (6), (7) отвечают преобразованию Лоренца и подтверждают правоту гипотезы Фитцджеральда о сокращении размеров движущихся тел, а также теории относительности Эйнштейна. Будем под термином *эффективная длина Частицы* понимать длину участка, где сконцентрировано 90 % энергии. Оказывается, что с увеличением скорости *эффективная длина Частицы реально уменьшается, а масса – реально увеличивается*.

Заметим, что при выводе этих соотношений мы использовали *условие квантования амплитуды волны* вида  $\psi_0 = const$ ; в нелинейной теории упругости можно найти много веских причин, в силу которых данное условие квантования следует считать не только приемлемым, но и единственно возможным. Так, например, в работе [7] аналогичное условие получено для винтовых стержней. Если прямой цилиндрический стержень был использован для навивки пружины, имеющей очень большой индекс  $z \gg 10$ , то возникающая при этом малая относительная кривизна не оказывает существенного влияния на остальные характеристики коротких экспоненциальных волн переноса (обоснование дано в [3]), но ограничивает амплитуду волны.

Осталось также заметить, что на рис.4 имеется много параллельных линий, и каждая из них соответствует своей Частице, имеющей определённую массу покоя. Но вот что становится особенно любопытным: при условии  $x > 5$  выполняется приближённое равенство (смотри рис.6)

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x J_1^2(r) r dr \approx \frac{1}{\pi},$$

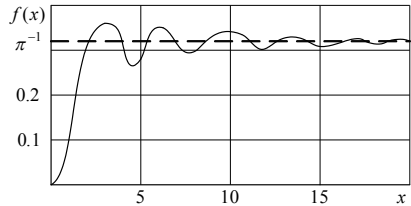


Рисунок 6 – Асимптотическое поведение функции.

поэтому

$$m_{0,j} \approx 0.25 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-2}.$$

Кроме того,  $v_{2,j} \approx 5.1 \cdot j$ , и, в результате,  $m_{0,j} \sim 1/j^2$ .

Масса Частицы пропорциональна энергии, следовательно, *кинетические энергии Частиц, отвечающих разным номерам  $j$ , описываются той же закономерностью, что и энергии электронов на разных оболочках атома [1]*.

**Фазовая и групповая скорость волны.** Гармоническая волна переноса (1), отвечающая первой четверти дисперсионной диаграммы (смотри рис.4), имеет фазовую скорость, превышающую скорость звука  $a_{non}$  :

$$v_f = \omega / \lambda = a_{non} \cdot \omega / \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} > a_{non} ,$$

и другие, чем описано выше, зависимости для динамических параметров. В релятивистской квантовой физике, где также решают уравнение Клейна – Гордона, чтобы исправить возникающее противоречие между теорией и практикой вводят понятие *групповой скорости волны переноса* [8]

$$v = c^2 / v_f , \quad (8)$$

актуальное для так называемого *волнового пакета*. Аналогичная формула для волн кручения стержня имеет вид

$$v = a_{non}^2 / v_f$$

но указать её физический смысл затруднительно. Преимущество экспоненциальных волн переноса заключается в том, что здесь можно ограничиться анализом уединённых волн и нет необходимости искать физический смысл для волнового пакета. Тем более что если изучаемая волна не описывает, например, установившееся состояние электронной оболочки атома, а распространяется в свободном пространстве, то существование волнового пакета, отвечающего соотношению (8), представляется сомнительным.

**Выводы.** Получены формулы для расчёта кинетической энергии, которую переносят экспоненциальные волны крутильной деформации стержня, имеющие постоянную (квантованную) амплитуду и определённую форму деформации сечения. Показано, что частота, волновое число и энергия волны при изменении скорости переноса подчиняются релятивистскому преобразованию Лоренца, а её реальная длина укорачивается в соответствии с гипотезой Фитцджеральда. При изменении формы деформации сечения энергия волны изменяется дискретно в соответствии с квантовым постулатом Нильса Бора.

**Список литературы:** 1. Х. Кухлинг. Справочник по физике. – М.: Наука, 1982. 2. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука, 1983. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериев А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 4. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // там же. – С.55-68. 6. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 7. Григорьев А.А., Дериев А.И. Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.39-54. 8. Э. Вихман. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с.

Поступила в редакцию 07.09.2011